数理解析研究所講究録
第 790 巻 1992 年 148-154

色塗り分け問題が P 完全又は NC になる為の十分条件について

岩本 宙造　　岩間 一雄
Chuzo Iwamoto　Kazuo Iwama
九州大学工学部

1. まえがき

並列アルゴリズムの研究が計算複雑度の高い問題に対してではなく，比較的複雑度の低い問題に対して主に行なわれているのは次のような合理的理由によるものである．NP 以上の難しい問題に対しては通常自明な並列化が存在して理論的興味にとぼしい上，並列化による著しい効果が期待しにくい．(例えば，2^n 直列時間の問題に対し多項式個のプロセッサを使っても，同じ時間で解ける問題のサイズはほとんど上がらない．) 逆に，複雑度の低い問題に対しては並列化による効果が大きく，実際，問題のサイズの巨大化から並列化の要求が強い回路シミュレーションや方程式の数値解を求める問題の多くがこの範疇に入る．

このような観点から，直列多項式時間の問題に対して並列化可能か (NC に入るか) 不可能か (P 完全か) の議論が活発に行なわれてきた．多くの個別の問題に対しては，既に決着がついているとはいえ，並列化 (不) 可能性に対する一般的かつ普遍的な条件や問題の性質に対する知見は，一部の例外[9]を除きあまり得られていないようである．本稿では，グラフ問題に対して，頂点分割問題と呼ばれる共通の性質を持つクラスを導入し，その中の幾つかの問題の並列化可能性について議論する．本クラスは連結成分問題等の重要な個別問題を含み，さらに，NC に入る問題と P 完全の問題の双方を含んでいる．関連の強い幾つかの問題の並列化可能性 / 不可能性を比較・検討することにより，関連の少ない個別の問題に対する同様の議論では得られない新たな知見を提供してくれるものと期待される．

2. 頂点集合分割問題

<u>頂点集合分割</u>(単に<u>分割</u>と呼ぶ) は，グラフ G の頂点集合 $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ の互いに素な<u>グループ</u> $V_1, V_2, \cdots, V_k$ ($V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k = V$, $i \neq j$ なら $V_i \cap V_j = \phi$) への分割のことである．<u>頂点集合分割問題</u>(VSPP) とは，このような分割を以下の直列アルゴリズムによって求めることができる問題に対する総称とする．

(i) 初期分割を，$V_1 = \{v_1\}, V_2 = \{v_2\}, \cdots, V_n = \{v_n\}$ とする．

(ii) 現在の分割 $V_1, \cdots, V_m$ に対し，<u>併合条件</u>を満たすどれか (どれでもよい) 1 対の V_i と V_j を併合して，新たな分割 $V_1, \cdots, V_{i-1}$, $V_{i+1}, \cdots, V_{j-1}$, $V_{j+1}, \cdots, V_m$, $V_i \cup V_j$ を作る．

(iii) 併合条件を満たすグループ対がなくなるまで (ii) を繰り返す．

従って，個々の VSPP は併合条件を具体的に与えることによって定まる．なお，本論文の目的は VSPP が NC に入るか (頂点数 n の多項式個のプロセッサで $(\log n)^{O(1)}$ 時間で計算できるか) を議論することであるから，少なくとも併合条件の判定そのものは NC に入るもののみを対象とする．例えば，連結成分問題 [4] は以下のように与えられる．

【連結成分問題の併合条件】

グループ A と B は，$(a,b) \in E$ である $a \in A$ と $b \in B$ が存在するなら併合可能．

連結成分問題と逆の関係になるのが独立集合分割問題 (MISP) である．独立集合分割とは，隣接する 2 頂点が同じ集合に入らないような頂点集合への分割である．このとき，如何なる二つの独立集合 I_1, I_2 に対しても $I_1 \cup I_2$ が独立集合でなくなるとき，独立集合分割は極大であるという．本問題については，**4.**でより詳しく述べる．

【MISP の併合条件】

グループ A と B は，$(a,b) \in E$ である $a \in A$ と $b \in B$ が存在 <u>しない</u> なら併合可能．

本研究の動機は，未だ NC に入るか P 完全かが分かっていない過半異色ラベル付け問題 (DTML) に対する一連の研究 [5, 6, 7, 10, 3] である．DTML は，各頂点 $v_1 \in V_1$ ($v_2 \in V_2$) の近傍の少なくとも半数は V_2 (V_1) に含まれるように頂点集合 V を V_1, V_2 に分割する問題である．DTML に関して，指定された二つの異なる頂点が同じ集合に入るように分割する問題 (2-DTML) は NP 完全まで難しくなることが知られている [6]．これは，直観的には局所的にラベルを決定することが不可能であることを意味し，DTML の並列化は非常に難しいと考えられているが，他方 P 完全性の証明も未だ成功していない．[7] は，各頂点ごとではなく，グラフ全体の中で過半数の枝が両端の頂点の色が異なるようにラベル付けする問題について，NC アルゴリズムが存在することを示した．また，[5, 3] は次数 3 のグラフに対する NC アルゴリズムを示している．一方，[10] は DTML を構成する単純な直列アルゴリズムを示し，辞書式順序優先 DTML は，P 完全であることを示した．更に，[3] は，決定性というある性質を持つグラフに対して局所的にラベルを決定する問題 (決定性 2-DTML) が P 完全となることを示した．このように，DTML に関しては，問題を難しくして P 完全を示すアプローチと易しくして並列アルゴリズムを示すアプローチによって問題の解決に迫るための幾つかの知見を得ているが，DTML が P 完全又は NC になる為の条件を場当たり的に与えているに過ぎないという批判があることも否定できない．

本稿では，場当たり的議論から脱却するため，DTML が P 完全になるための条件を頂点集合分割という一般的な枠組で与える．DTML には，(a) 次数が奇数で近傍が同じ 2 頂点は同じグループに属する，(b) 頂点 v の近傍の半数 (以上) が同じグループ (V_1 とする) に入るとき v は V_2 に属する，という単純な性質がある．そこで，これらの条件をそのまま反映した次のような VSPP(局所決定性 DTML) を定義する．但し，$N_G(v)$ は G における v の近傍の集合，$deg_G(v)$ は G における v の次数である．また，$h(v) = \left\lceil \frac{deg_G(v)}{2} \right\rceil$ とする．

【局所決定性 DTML の併合条件】

(i) *グループ* A と B は，$deg_G(a), deg_G(b)$ が共に奇数で $N_G(a) = N_G(b)$ を満たす $a \in A$, $b \in B$ が存在するなら併合可能．

(ii) グループ A と B に対して，$a_1, a_2, \cdots, a_{h(b)} \in N_G(b)$ である $\{a_1, a_2, \cdots, a_{h(b)}\} \subseteq A$ と $b \in B$ が存在するとき $A \leftarrow B$ と書くことにする．$A \leftarrow B$ かつ $B \leftarrow C$ であるグループ C が存在するなら A と C は併合可能．

この併合条件のもとで求まる分割が二つのグループになる保証はない．つまり，上の条件 (a) と (b) は DTML を求める為の必要十分条件にはなっていない．しかし，もし二つのグループになるならそれが DTML になっていることは明らかである．[3] で議論された決定性 2-DTML も本稿の枠組のもとでは，上記に次の条件 (iii) を加えるだけでより自然に定義できる．

【決定性 2-DTML の併合条件】

(i),(ii) は局所決定性 DTML の (i),(ii) と同じ．

(iii) 指定された 2 頂点 s, t をそれぞれ含むグループ S, T は，併合可能．

他の問題も併合条件の記述が多少繁雑になることをがまんすれば VSPP として形式化できる．and/or グラフ [8] とは，それぞれの頂点に $\{AND, OR\}$ が割り当てられた有向グラフのことである．and/or グラフ $D = (V_D, E_D)$ において指定された $t \in V$ に到達可能であるとは，以下のルールを用いて t に石が置ける場合をいう．

(a) $pred(v) = \phi$ なる頂点 v には常に石が置ける．

(b) AND 頂点 v に対しては，$pred(v)$ の全頂点に石が置かれているとき v に石が置ける．但し，$pred(v) = \{u|(u, v) \in E_D\}$．

(c) OR 頂点 v に対しては，$pred(v)$ のある頂点に石が置かれているとき v に石が置ける．

and/or グラフの到達可能性問題 (AGAP) は，次のような VSPP で定義できる．

【AGAP の併合条件】

(i) グループ A と B は，$pred(a) = pred(b) = \phi$ を満たす $a \in A$ と $b \in B$ が存在するなら併合可能．

(ii) グループ A と B は，$pred(b) = \phi$ かつ $b \in pred(a)$ を満たす $b \in B$ と OR 頂点 $a \in A$ が存在するなら併合可能．

(iii) グループ A と B は，$b_2 \in pred(b_1)$ かつ $b_1 \in pred(a)$ を満たす $b_1, b_2 \in B$ と OR 頂点 $a \in A$ が存在するなら併合可能．

(iv) グループ A と B は，$a \in A$ を AND 頂点としたとき，$pred(a) = \{b_1, \cdots, b_k\}$ なる各 $b_1, \cdots, b_k \in B$ に対し，$b'_i \in pred(b_i)$ なる $b'_i \in B$ が存在，又は $pred(b_i) = \phi$ を満たすなら併合可能．

3. 並列化可能性

VSPP としてみた連結成分問題，決定性 2-DTML， AGAP に対しては，前者が NC，後二者が P 完全となることはそれぞれ原問題に対する結果より (併合条件が正しいなら) 明らかである．本稿での新たな結果は，

[定理 1] MISP は NC に入る．

[定理 2] 局所決定性 DTML は P 完全である．

決定性 2-DTML が NC に入るなら局所決定性 DTML も NC に入ることは明らかであり (つまりダミーの 2 頂点を用意すれば良い)，定理 2 は文献 [3] の結果を強調しているといってよい．但し，決定性 2-DTML の場合は入力集合を，結果が必ず二つのグループになるグラフに限定しても依然として P 完全であるのに対し，局所決定性 DTML ではこの性質はない．

P 完全となる 3 問題の条件を解析すると，併合条件を満たさなかったグループ対がある時点で条件を満たすグループ対に変化する場合がある． P 完全性の証明にはこの性質を積極的に利用している．それに対し， NC に入る二つの問題は，条件を満たさないグループ対はその後永久に条件を満たさない性質があることが確かめられる．このような性質を持つ併合条件で定義できる問題は，必ず NC となることを **4.**で述べる．しかし， VSPP として定義できる問題の中で NC となるもの全てが併合条件にこのような性質があるのかは分かっていない．

4. 極大独立集合分割問題の NC アルゴリズム

極大独立集合分割問題 (MISP) は，自然な問題で，応用の範囲も少なくないと思われるが，我々の知る限りほとんど議論されていない．極大独立集合問題 (MIS)[2] は有名であるが， MISP は MIS を繰り返し構成することから自明に求まるわけではないことに注意が必要である．極大独立集合を見つけてそれをグラフから取り除く，という手続きを繰り返す方法では $(\log n)^{O(1)}$ 時間が達成できないことは次数が大きい頂点を含むグラフ (例えば完全グラフ) を考えると容易に分かる．さらに， MISP と類似の分割問題として $\Delta+1$ 彩色問題 [7] がある．しかし， $\Delta+1$ 彩色で求まる分割が本問題の意味で極大であるとは限らないし，逆に，極大に独立分割されていても $\Delta+1$ より必ず少ない独立集合に分割されるわけでもない．

＜ MISP を構成する NC アルゴリズム＞

(i) 頂点集合 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ に対して， $I_i=\{v_i\}$ として n 個の自明な独立集合に分割する．

(ii) 今， V が $p\leq n$ 個の独立集合 I_1, I_2, $\cdots$, I_p に分割されているとする．各独立集合 I_i を一つの頂点とみなし，グラフ $\overline{G_I}=(V_I,\overline{E_I})$, $G_I=(V_I,E_I)$ を構成する．但し， $\overline{E_I}$ (E_I) は $I_j\cup I_k$ が独立集合でないとき (あるとき) に限り $(I_j,I_k)\in\overline{E_I}$ ($(I_j,I_k)\in E_I$) で定義する．

(iii) G_I の極大マッチングを構成し，独立集合の組を作る．

(iv) (iii) で構成した独立集合の各組をマージする．

(v) 以下 (ii) ～ (iv) を $\overline{G_I}$ が完全グラフになるまで繰り返す.

このアルゴリズムで (iv) の実行回数が $O(\log n)$ であることを以下で述べる. (iv) の一回の実行で独立集合の数が $1/k$ 倍 ($k > 1$ は定数) となることを示せればよいが, (iii) でマッチングを構成したとき, G_I の頂点の全てが組となるわけではない. つまり, 多くの独立集合が組を作らない可能性もあり, 独立集合の数が $1/k$ 倍となることを示すことは容易ではない. しかし, (ii) が実行される時点で $\overline{G_I}$ が位数 l の完全部分グラフを含んでいる場合, アルゴリズム終了時の $\overline{G_I}$(完全グラフとなっている) の頂点数は少なくとも l であるという性質を使えば, (iv) の実行回数は $O(\log n)$ 回となることが証明できる. より詳しくは, G_I 上の極大マッチングを構成したとき, 他の独立集合と組を作れなかった独立集合の集合を K とおく. G_I 上において, K に含まれる如何なる二個の独立集合も間に枝は存在しない. このことから, K は $\overline{G_I}$ 上において完全部分グラフをなす. K に含まれない独立集合の数はマージされて半分になる. アルゴリズム終了時の $\overline{G_I}$ は、少なくとも $|K|$ 個の色頂点は含まれるので (iv) の実行回数は $O(\log n)$ 回となる. 極大マッチングの構成は NC であることが知られているので [1], 上記アルゴリズムは NC アルゴリズムであることが分かる.

VSPP の併合条件の判定そのものは NC に入ることから, VSPP に含まれる全ての問題に対し, 上記 $\overline{G_I}$, G_I の構成は NC である. さらに, 条件を満たさないグループ対はその後永久に条件を満たさないように併合条件を定義できる VSPP は, アルゴリズムの実行時間の評価が上記と同様できるので必ず NC となる.

5. 局所決定性 DTML の P 完全性の証明

本稿では, P 完全性の証明は and/or グラフの到達可能性問題 (AGAP) の P 完全性を利用する. ただし, 本節での AGAP のインスタンス $D = (V_D, E_D)$ は, 一般に知られている AGAP[8] の定義とは少し異なり, AND 頂点の入次数を 2 又は 1, 出次数を 1 とし, AND 頂点 (OR 頂点) の近傍は必ず OR 頂点 (AND 頂点) であるとする. さらに, 全ての頂点に石が置けるかを問う問題とする. このように制限しても AGAP の P 完全性は保存される (証明は省略).

[定理 2] 局所決定性 DTML は P 完全である.

証明 AGAP のインスタンス (有向グラフ)$D = (V_D, E_D)$ に対し局所決定可能性問題のインスタンス (無向グラフ)$G = (V, E)$ を次のように構成する. まず, $S \subseteq V_D$ を $S = \{v | pred(v) = \phi\}$ とする. D の各有向枝 (u, v) を, それが OR 頂点から AND 頂点への枝であるとき, 新たな頂点 a_{uv}, w^1_{uv}, w^2_{uv}, 枝 (u, w^1_{uv}), (w^1_{uv}, v), (w^1_{uv}, a_{uv}), (u, w^2_{uv}), (w^2_{uv}, v), (w^2_{uv}, a_{uv}) に置き換える. このとき, AND 頂点の入次数が 1 であるときは, 更に a'_{uv}, w'^1_{uv}, w'^2_{uv}, 枝 (u, w'^1_{uv}), (w'^1_{uv}, v), (w'^1_{uv}, a'_{uv}), (u, w'^2_{uv}), (w'^2_{uv}, v), (w'^2_{uv}, a'_{uv}) を加える. AND 頂点から OR 頂点への枝であるときは, 新たな頂点 a_{uv}, w_{uv}, 枝 (u, w_{uv}), (w_{uv}, v), (w_{uv}, a_{uv}) に置き換える. 以上の処理は D の各枝を定数本の頂点, 枝に置換するだけでよいので対数領域で可能である. この置換で得られるグラフを $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ と呼ぶ. また, 頂点集合 V_a, W_{OA}, W'_{OA}, W_{AO}, W を以下のように定義する.

$$V_a = \{a_{uv} | (u, v) \in E_D\}, \tag{1}$$

$$W_{OA} = \{w^1_{uv}, w^2_{uv} | (u, v) \in E_D \text{ かつ } u, v \text{ はそれぞれ OR,AND 頂点}\}, \tag{2}$$

$$W'_{OA} = \{w'^1_{uv}, w'^2_{uv} | (u, v) \in E_D \text{ かつ } u, v \text{ はそれぞれ OR,AND 頂点かつ } deg_D(v) = 1\}, \tag{3}$$

$$W_{AO} = \{w_{uv}|(u,v) \in E_D \text{ かつ } u,v \text{ はそれぞれ AND,OR 頂点}\}, \quad (4)$$
$$W = W_{OA} \cup W'_{OA} \cup W_{AO}. \quad (5)$$

$\widetilde{D}$ の各 AND 頂点 v に対し，新たな頂点 b_1^v, b_2^v, 枝 (v, b_1^v), (v, b_2^v) を加える．

$$V_b = \{b_1^v, b_2^v | v \in \tilde{V} \text{ は AND 頂点}\} \quad (6)$$

とする．$\widetilde{D}$ の各 OR 頂点 $u \notin S$, $v \in S$ に対しては,

$$V_c^{\overline{S}} = \{c_1^u, c_2^u, \cdots, c_{k-1}^u | u \in \tilde{V} \text{ かつ } u \notin S \text{ かつ } u \text{ は OR 頂点かつ } k = deg_{\widetilde{D}}(u)\}, \quad (7)$$
$$V_c^S = \{c_1^v, c_2^v, \cdots, c_{k+1}^v | v \in \tilde{V} \text{ かつ } v \in S \text{ かつ } v \text{ は OR 頂点かつ } k = deg_{\widetilde{D}}(v)\}, \quad (8)$$
$$V_c = V_c^{\overline{S}} \cup V_c^S. \quad (9)$$

なる頂点集合に含まれる頂点を新たに加え，$c_1^u, \cdots, c_{k-1}^u$ ($c_1^v, \cdots, c_{k+1}^v$) の各頂点と u (v) 間を枝で結ぶ．更に,

$$V_d = \{d_1, d_2\}, \quad (10)$$
$$V_e = \{e_1, e_2, \cdots, e_{n_e} | n_e \text{ は } n_e > |V_c| \text{ なる偶数}\}, \quad (11)$$
$$V_f = \{f_1, f_2, \cdots, f_{n_f} | n_f > |V_a| + |V_b| + |V_d|\}, \quad (12)$$
$$V_g = \{g\} \quad (13)$$

なる頂点集合に含まれる頂点を新たに加え，V_c と V_d 間，$V_a \cup V_b \cup V_d$ と V_e 間，V_e と V_f 間，V_f と V_g 間を完全２部グラフ状に枝で結合する．こうして得られたグラフ G に対し，以下の４補題が成り立つ．

[補題１] V_a, V_b, V_d, V_f に含まれる全頂点，V_c, V_e, V_g に含まれる全頂点はそれぞれ同じグループに属し，$V_a \cup V_b \cup V_d \cup V_f {+} V_c \cup V_e \cup V_g$ である．

証明 **2.** で示した併合条件の (i) より V_f の属する全頂点は同じグループに入る．このことと条件 (ii) より $V_g{+}V_f$, $V_f{+}V_e$, 故に V_g と V_e は同じグループに入る．同様にして，$V_e{+}V_a$, $V_e{+}V_b$, $V_e{+}V_d$, $V_d{+}V_c$ が導けるので，V_a, V_b, V_d, V_f に含まれる全頂点，V_c, V_e, V_g に含まれる全頂点はそれぞれ同じグループに属する． □

[補題２] S と $V_a \cup V_b \cup V_d \cup V_f$ は同じグループに属する．

証明 (8) 及び補題１． □

W に含まれる頂点 w は近傍として３頂点持ち，それらは V_a に含まれる２頂点 (a とする)，AND 頂点 (v_{and} とする)，OR 頂点 (v_{or} とする) である．補題１より S と V_a は同じグループに入ることから，$\{w\}{+}S$ となるのは $\{v_{and}\}$ と $\{v_{or}\}$ の少なくとも一方が S と同じグループに入る場合に限られる．このことに注意すると，以下の２補題が成り立つ．但し，$PRED_{AND}(v)$, $PRED_{OR}(u)$ は次のように定義する．AND 頂点 v から距離２だけ離れた頂点のうち，v からの長さ２の道が二つ以上存在する頂点の集合を $PRED_{AND}(v)$, OR 頂点 u から距離２だけ離れた頂点で，u からの道が一つ存在する頂点の集合を $PRED_{OR}(u)$ とする．

[補題３] G において $\{v\}$ が S に含まれるグループと併合可能であるのは，$PRED_{AND}(v)$ が S と同じグループに併合されている場合に限られる．

証明　v は AND 頂点であるので G において 7 近傍を持つ．そのうち 2 近傍は V_b に属し S と同じグループに属する (補題 2)．v の近傍で W に含まれる 5 頂点は局所決定性 DTML の併合条件の (i) を用いると 2,2,1 頂点にグループ分けされるので，v の近傍の過半数 (つまり 4 近傍) が $V_c(+S)$ と同じグループに入るのは，$PRED_{AND}(v)$ と S が同じグループに入る場合に限られることは容易に確かめられる．□

[補題 4]　G において $\{u\}$ が S に含まれるグループと併合可能であるのは，$PRED_{OR}(v)$ が S と同じグループに併合されている場合に限られる．

証明　補題 1 より V_c+S, 及び u の近傍のうち $\lfloor deg_G(u)/2 \rfloor$ 頂点は V_c に含まれる ($deg_G(u)$ は奇数であることに注意)．これらのことから，u の近傍で V_c に含まれない頂点の少なくとも一つが $V_c(+S)$ と同じグループに入るときに限り，条件 (ii) より，$\{u\}$ は S と同じグループに属することになる．つまり，u から距離 2 だけ離れた頂点 (AND 頂点) の少なくとも一つが S と同じグループに入るとき，$\{u\}$ は S と同じグループに属することになる．ここで，補題 3 より AND 頂点 v に石が置かれているのは $PRED_{AND}(v)$ に既に石が置かれている場合に限られることから，D において OR 頂点 u に石が置けるのは G において $PRED_{OR}(u)$ に含まれるある頂点がが S と同じグループに入る場合に限られる．□

(定理 2 証明終)

参考文献

[1] A. Gibbons and W. Rytter, “Efficient parallel algorithms,” *Cambridge University Press*, 1988.

[2] M. Goldberg and T. Spencer, “Constructing a maximal independent set in parallel,” *SIAM J. Disc. Math.* Vol.2, No.3, pp. 322–328, 1989.

[3] 岩本，太田，岩間，“過半異色ラベル付問題の並列化可能性について,” 信学技報, COMP91-46, 1991.

[4] P. C. Kanellakis and P. Z. Revesz, “On the relationship of congruence closure and unification,” *J. Symbolic Computation*, 7, pp.427–444, 1989.

[5] M. Karloff, “A happy partition problem,” *private communication.*

[6] M. Luby, “A simple parallel algorithm for the maximal independent set problem,” *SIAM J.Comput.* Vol.15, No.4, pp.1036–1053, 1986.

[7] M. Luby, “Removing randomness in parallel computation without a processor penalty,” *Proc. 29th IEEE FOCS*, pp.162–173, 1988.

[8] S. Miyano, S. Shiraishi, and T. Shoudai, “A list of P-complete problems,” *Technical Report RIFIS-TR-CS-17*, 1990.

[9] S. Miyano, “The lexicographically first maximal subgraph problems: P-completeness and NC algorithms,” *Math. Syst. Theory*, 22, pp.47–73, 1989.

[10] R. Sarnath, and Xin He, “A P-complete graph partition problem,” *Theoretical Computer Science* 76, pp.343–351, 1990.